À la découverte des Chaînes de Markov

Pi Day - Lycée Louis Le Grand

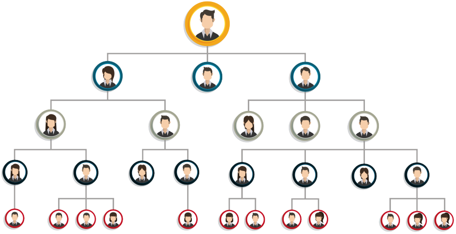
Maxime Egéa

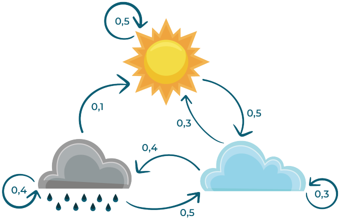
14 Mars 2025

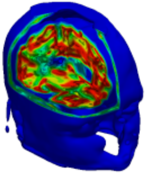
SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

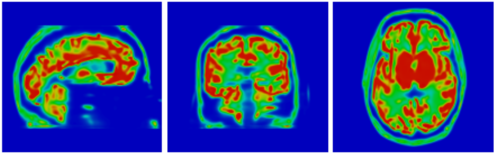
LPSM LABORATOIRE DE PROBABILITÉS STATISTIQUE & MODÉLISATION

Motivations









Cadre Mathématique

Notations

On définit

- *Un* **espace probabilisé** $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
- *Un* **espace d'états** E. *Pour cette présentation,* $E = \{1, 2, \dots, M\}$ *est fini.*
- *Une suite de* **variables aléatoires** $X_n : \Omega \mapsto E$ *où* n *représente l'évolution dans le temps.*
- *Quand* E *est fini, on décrira la loi d'une v.a* X *avec un* **vecteur ligne** $X \sim (\mathbb{P}(X = 1), \dots, \mathbb{P}(X = M))$.

Exemple : le modèle de la météo

$\Omega = \{$  ,  ,  $\}$ et $E = \{1, 2, 3\}$.

Chaîne de Markov

Définition

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ *une suite de variables aléatoires prenant leurs valeurs dans un espace d'états* E. *On dit que* $(X_n)_{n\geq 0}$ *est une chaîne de Markov si elle vérifie la* **propriété de Markov**, *c'est-à-dire :*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0) \\ = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i),\end{aligned}$$

pour tout $n \geq 0$ *et pour tout* $(i, j, x_0, \ldots, x_{n-1}) \in E^{n+2}$.

La chaîne est dite **homogène** si ses probabilités de transition ne dépendent pas de n :

$$p_{ij} := \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i),$$

pour tout $i, j \in E$ et $n \in \mathbb{N}$.

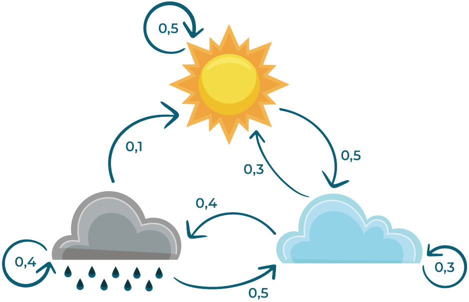
Matrice de transition

Définition

Dans le cas d'une chaîne de Markov homogène, on peut définir sa **matrice de transition** *P :*

$$P := (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Par exemple :



$$\begin{matrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \end{matrix}$$

Équation de Chapman-Kolmogorov

Pour $i, k \in E$ on définit

$$p_{ik}^{(n)} := \mathbb{P}(X_n = k \mid X_0 = i),$$

on note $P^{(n)}$ la **matrice de transition en n étapes**.

Théorème (équation de Chapman-Kolmogorov)

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur un espace d'états E avec matrice de transition P, alors on a

$$P^{(n)} = P^n.$$

La matrice de transition en n étapes est égale à la puissance n-ième de la matrice de transition.

Cela nous permet de décrire la loi de X_n matriciellement.

Loi de X_2 dans le modèle de météo

Avec la formule des **probabilités totales**, on a

$$\mathbb{P}(X_1 = j) = \sum_{i \in E} \underbrace{\mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i)}_{=p_{ij}} \mathbb{P}(X_0 = i).$$

Donc, si on note μ le vecteur ligne de la loi de X_0, on a $X_1 \sim \mu P$.
Par exemple, si $\mu = (1, 0, 0)$ alors d'après l'équation de **Chapman-Kolmogorov**

$$X_2 \sim (1, 0, 0) \times \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Loi de X_2 dans le modèle de météo

Avec la formule des **probabilités totales**, on a

$$\mathbb{P}(X_1 = j) = \sum_{i \in E} \underbrace{\mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i)}_{= p_{ij}} \mathbb{P}(X_0 = i).$$

Donc, si on note μ le vecteur ligne de la loi de X_0, on a $X_1 \sim \mu P$.
Par exemple, si $\mu = (1, 0, 0)$ alors d'après l'équation de **Chapman-Kolmogorov**

$$X_2 \sim (1, 0, 0) \times \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{25} & \frac{11}{25} & \frac{7}{25} \\ \frac{6}{25} & \frac{2}{5} & \frac{9}{25} \end{pmatrix} = \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5} \right).$$

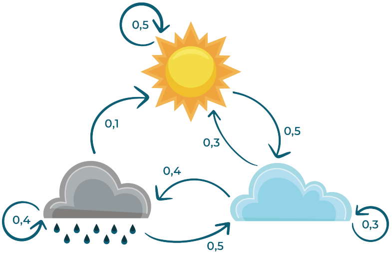
Classification des états

Définition

- *On dit qu'un état $i \in E$* **communique** *avec j s'il existe n tel que* $\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) > 0$
- *Il est* **transitoire** *si la probabilité d'y revenir en temps fini est strictement inférieure à 1 et* **récurrent** *sinon.*
- *Un état $i \in E$ est* **périodique** *s'il existe un entier $d > 1$ tel que les retours à i se font uniquement aux multiples de d.*

Une chaîne est dite **irréductible** *si tous les états communiquent entre eux.*

Dans l'exemple de la météo, la chaîne de Markov est **irréductible**.



loi stationnaire

Définition

Une loi **stationnaire** π *est un vecteur ligne à* M *coordonnées dont la somme des coefficients vaut* 1 *et telle que*

$$\pi P = \pi.$$

Cela signifie que si π est la loi initiale alors, la chaîne gardera la même loi à chaque instant.

Proposition

Si la chaîne de Markov est **irréductible** *alors il y a existence et unicité de la loi* **stationnaire**.

Temps moyen passé à chaque état

Théorème (Ergodique)

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov irréductible de loi stationnaire π. Pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}$, on a la convergence suivante :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{i\in E} f(i)\pi_i.$$

En particulier, si f est l'indicatrice de l'état j :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

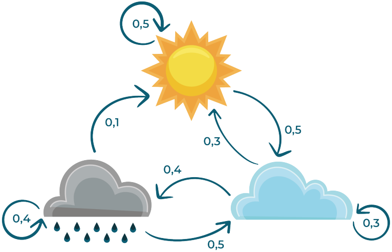
Le théorème décrit le **temps moyen passé à l'état j**.

loi stationnaire pour la météo

La chaîne est **irréductible** donc il existe une unique **loi stationnaire**. Il n'y a plus qu'à résoudre le système

$$\pi \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \end{pmatrix} = \pi,$$

on trouve $\pi = \begin{pmatrix} \frac{11}{36} & \frac{5}{12} & \frac{5}{18} \end{pmatrix}$.



Le **théorème ergodique** nous permet d'affirmer que, sur un temps long, il fera du soleil 11 jours sur 36 en moyenne.

Espace d'états E fini - Résumé

- À partir d'une dynamique d'évolution, on sait construire la **matrice de transition** de la chaîne.
- Grâce à l'équation de **Chapman-Kolmogorov**, on sait décrire la loi de la chaîne à tout instants n.
- On sait **classifier** les états : **transitoire** ou **récurrent**.
- Quand la chaîne est **irréductible**, on a vu un résultat de **convergence ergodique** vers la loi stationnaire. Sous des hypothèses plus fortes, il y a aussi **convergence en loi** de la chaîne vers la loi stationnaire.

Quid de E infini ?

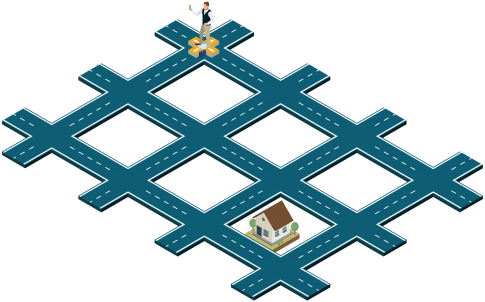
Chaînes de Markov en espace d'états infini

- La matrice de transition devient un opérateur, il y a aussi une équation de **Chapman-Kolmogorov**
- L'irréductibilité de la chaîne **n'implique plus nécessairement** l'existence d'une loi stationnaire.
- Il faut en plus que la chaine soit **récurrente positive** pour avoir existence et unicité.
- Dans le cas d'une chaîne **irréductible** et **récurrente positive** il y a convergence en loi de la chaine et un théorème ergodique.

Le voyageur perdu - Marche aléatoire en 2-dimension

Définition

- *$X_n \in \mathbb{Z}^2$ est la position du voyageur à l'instant n, à chaque instant il avance au hasard dans l'une des 4 directions.*
- *On suppose qu'il a commencé sa marche $X_0 = (0, 0)$, là ou se trouve son logement.*



A t'il une chance de rentrer en temps fini ?

Le voyageur perdu - Marche aléatoire en 2-dimension

Proposition

Une marche aléatoire $(X_n)_{n\geq 0}$ *dans* $\mathbb{Z}^d$ *est* **récurrente** *si et seulement si*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_i = 0) = +\infty.$$

- On peut montrer que $\mathbb{P}(X_{2n} = 0) \simeq \frac{1}{\pi n}$ et donc $(X_n)_{n\geq 0}$ **est récurrente** *i.e* elle revient à l'origine une infinité de fois (p.s).
- En revanche, elle **n'est pas récurrente positive** et elle **n'a pas de loi stationnaire**.

Remarque

En 3-dimension, on a $\mathbb{P}(X_{2n} = 0) \simeq \frac{1}{(2\pi n)^{3/2}}$ *donc la chaîne n'est pas récurrente. Cela signifie qu'un pigeon ayant perdu tout sens d'orientation a des chances de ne jamais rentrer au nid !*

Merci pour votre attention !